# Résolution d'une équation Diophantienne

Thème abordé : structures algébriques

*Partie I – Propriétés des sous-groupes de* $\mathbb{R}$ .

Soit $G$ un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$ .

1.a Montrer que l'ensemble $G\cap\mathbb{R}^{+*}$ est non vide

1.b Justifier l'existence de $a=\inf G\cap\mathbb{R}^{+*}$ .

2. On suppose $a>0$ .

2.a Montrer que $a\in G$ .

2.b En déduire que $a\mathbb{Z}\subset G$ .

2.c Soit $x\in G$ .
Prouver l'existence d'un $n\in\mathbb{Z}$ tel que $na\le x<(n+1)a$ .

2.d Montrer que $x=na$ et conclure $G=a\mathbb{Z}$ .

3. On suppose $a=0$ .
Montrer que $G$ est dense dans $\mathbb{R}$ .

*Partie II – Application*

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $x^2-3y^2=1$ et on note $H=\left\{x+y\sqrt{3}/(x,y)\in\mathcal{S}\right\}$

1. Montrer que $\{\ln h/h\in H\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$ .

2. On admet que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.
Montrer que si les couples $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ et $(x',y')\in\mathbb{Z}^2$ vérifient $x+y\sqrt{3}=x'+y'\sqrt{2}$ alors ils sont égaux.

3. Montrer que si $x+y\sqrt{3}\in H$ et $x+y\sqrt{3}>1$ alors $x\ge 2$ et $y\ge 1$ .

4. Calculer $\inf H\cap]1,+\infty[$ puis $a=\inf G\cap\mathbb{R}^{+}*$ .

5. Prouvez que $H=\left\{(2+\sqrt{3})^n/n\in\mathbb{Z}\right\}$ .

6. Déterminer les couples $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $x^2-3y^2=1$ .

# Correction

d'après ULM Lettres 2002
Yapadecorrection.